Combinatoires

# Quelques notions de la théorie des ensembles

Description d’un ensemble

1. Lister les éléments : A = {1, 2, 3, 4}
2. Donner une description : A est l’ensemble des entiers compris entre 1 et 4
3. L’ordre ne compte pas

Notations

x € A (ex : 1 € A)  
A c B (ex : A c {1, 2, 3, 4, 5, 6}  
A = B ssi A c B et B c A

Description du sous ensemble

L’ensemble des éléments de A qui satisfont la propriété P {x € A | P(x)}  
ex : B = {x € A | x <= 3} = {1, 2, 3} c A

Convention

[[a, b]] : l’ensemble de tous les entiers compris entre a et b inclus  
ex : [[1, 4]] = {1, 2, 3, 4}

Opérations ensemblistes

Exemple : A = {1, 2, 3} et B = {3, 4}

Union (A u B)

A u B = {1, 2, 3, 4}

Intersection (A n B)

A n B = {3}

Produit cartésien (A x B)

A x B = {(a, b) | a € A, b € B}  
  
A x B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}  
A² = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}  
A3 = A x A² = {(1, 1, 1), (1, 1, 2), …}

Différence

A \ B = A – B = {x € A | x €/ B}  
  
A – B = {1, 2}

P(A) = {B | B c A}

L’ensemble de tous les sous-ensembles de A  
Ex : P(A) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

Notations d’union ou intersections itérées

Pour chaque ensemble i € I, Ai est un ensemble.  
ui € I Ai est l’ensemble de tous les éléments qui sont au moins dans un des ensembles Ai  
ni € I Ai est l’ensemble de tous les éléments qui sont dans tous les ensembles Ai  
Ex : I = {1, 2, 3}, A1 = {1, 2}, A2 = {2, 3} , A3 = {3, 4}  
ui € I Ai = A1 u A2 u A3 = {1, 2, 3} u A3 = {1, 2, 3, 4}  
ni € I Ai = A1 n A2 n A3 = {2} n A3 = {Ø}

Ensembles finis, cardinal

Ensemble infini : N, Z, C

Pour un ensemble fini, son cardinal est son nombre d’éléments (notation : #A)  
Ex : #A = 3, #B = 2

Si on a un ensemble A tq #A = a et un ensemble B tq #B = b  
#(A x B) = a x b  
pour a = 3 et b = 2, #(A x B) = 6

Deux ensembles sont disjoints si leur intersection est Ø.  
Quand on parle de plus de deux ensembles, deux notions :

* Des ensembles (Ai)i € I sont deux à deux disjoints si Ai n Aj = Ø, pour tout i =/ j
* Des ensembles (Ai)i € I sont globalement disjoints si ni € I Ai = Ø

Est-ce que A1, A2, A3 sont deux à deux disjoints ?

A1 n A2 = {2} =/ Ø donc pas deux à deux disjoints

Est-ce que A1, A2, A3 sont globalement disjoints ?

A1 n A2 n A3 = Ø donc globalement disjoints